Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

El març del 2021 es va llançar el primer nanosatèl·lit de la Generalitat de Catalunya a l'espai. Els nanosatèl·lits tenen com a funció millorar les comunicacions, controlar els cabals dels cursos d'aigua i prevenir incendis. També contribueixen a la recerca i realització de missions espacials més àgils i econòmiques. Aquests nanosatèl·lits acostumen a orbitar a uns 500 km d'altura (distància respecte a la superfície de la Terra).

a) **Suposant que l'òrbita d'un d'aquests nanosatèl·lits és circular, a partir de la llei de la gravitació universal deduïu-ne l'expressió de la velocitat orbital en funció del radi orbital. Calculeu també la velocitat i el període orbitals d'aquests nanosatèl·lits.**

b) **Partint de la llei de la conservació de l'energia mecànica (negligiu la força de fregament), deduïu l'expressió de la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita un satèl·lit en funció del radi orbital. Calculeu la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita el nanosatèl·lit a 500 km d'altura.**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ **N m^2 kg^{-2}.**
Massa de la Terra, $M_{\text{Terra}} = 5,98 \times 10^{24}$ **kg.**
Radi de la Terra, $R_{\text{Terra}} = 6\,370$ **km.**

Solución:

a) **Suposant que l'òrbita d'un d'aquests nanosatèl·lits és circular, a partir de la llei de la gravitació universal deduïu-ne l'expressió de la velocitat orbital en funció del radi orbital. Calculeu també la velocitat i el període orbitals d'aquests nanosatèl·lits.**

Vamos a deducir la expresión de la velocidad orbital. Según la ley de la gravitación universal de Newton, la fuerza gravitatoria que actúa sobre un satélite de masa m orbitando a una distancia r de la masa de la Tierra M se expresa como:

$$F_{\mathrm{g}} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}.$$

Por otro lado, para un movimiento circular uniforme, la fuerza centrípeta necesaria para mantener al satélite en órbita es:

$$F_{\mathrm{c}} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

En equilibrio, estas dos fuerzas son iguales:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{c}} \implies \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Simplificando y despejando la velocidad orbital v:

$$\frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}.$$

Calculamos el radio de la órbita:

$$r = R_{\text{Tierra}} + h = 6{,}370 \cdot 10^6 \text{ m} + 5{,}00 \cdot 10^5 \text{ m} = 6{,}870 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7{,}62 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

El período orbital se calcula mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot 6{,}87 \cdot 10^6 \text{ m}}{7{,}62 \cdot 10^3 \text{ m/s}} \approx \frac{4{,}31 \cdot 10^7 \text{ s}}{7{,}62 \cdot 10^3} = 5{,}66 \cdot 10^3 \text{ s}.$$

Convertimos a horas:

$$T = \frac{5{,}66 \cdot 10^3 \text{ s}}{3{,}600 \text{ s/h}} = 1{,}57 \text{ h}.$$

Por lo tanto, la velocidad orbital es $v = 7{,}62 \cdot 10^3$ m/s y el período orbital es $T = 1{,}57$ horas.

b) **Partint de la llei de la conservació de l'energia mecànica (negligiu la força de fregament), deduïu l'expressió de la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita un satèl·lit en funció del radi orbital. Calculeu la velocitat de llançament necessària per a posar en òrbita el nanosatèl·lit a 500 km d'altura.**

Vamos a deducir la expresión de la velocidad de lanzamiento. Partiendo de la ley de conservación de la energía mecánica, donde se desprecia la fuerza de fricción, la energía mecánica total en la superficie de la Tierra debe ser igual a la energía mecánica en la órbita:

$$E_{\text{mecánica, superficie}} = E_{\text{mecánica, órbita}} \quad \Rightarrow \quad E_{c,\text{superficie}} + E_{p,\text{superficie}} = E_{c,\text{órbita}} + E_{p,\text{órbita}}.$$

En la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p,\text{superficie}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R_{\text{Tierra}}}.$$

En la órbita circular, la energía cinética es:

$$E_{c,\text{órbita}} = \frac{1}{2} m v_{\text{órbita}}^2.$$

Y la energía potencial gravitatoria es:

$$E_{p,\text{órbita}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

La energía mecánica en la órbita es:

$$E_{\text{mecánica, órbita}} = \frac{1}{2} m v_{\text{órbita}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

Igualando las energías:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R_{\text{Tierra}}} = -\frac{1}{2} \frac{G \cdot M \cdot m}{r}.$$

Simplificando y despejando v:

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{R_{\text{Tierra}}} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Sustituyendo los valores:

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \left(\frac{2}{6{,}370 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{6{,}870 \cdot 10^6 \text{ m}} \right)} = 8{,}2 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}.$$

Por lo tanto, la velocidad de lanzamiento necesaria para poner en órbita el nanosatélite a 500 km de altura es $v_{\text{lanzamiento}} = 8{,}2 \cdot 10^3$ m/s.

Problema 2. Campo Electromagnético

Hem situat una càrrega puntual $Q = +1,00$ nC a l'origen de coordenades.

a) **Determineu a quina distància de la càrrega el potencial és igual a $3,00$ V, $6,00$ V, $9,00$ V i $12,0$ V, respectivament. Representeu les línies equipotencials corresponents als potencials de $3,00$ V, $6,00$ V, $9,00$ V i $12,0$ V. Digueu si la distància entre les línies equipotencials és constant i quant val o valen aquestes distàncies.**

b) **En la mateixa figura, representeu 8 línies de camp elèctric. Quin angle formen les línies de camp amb les línies equipotencials en el punt on es creuen?**

Dada:
$\boldsymbol{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,00 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}}$

Solución:

a) **Determineu a quina distància de la càrrega el potencial és igual a $3,00$ V, $6,00$ V, $9,00$ V i $12,0$ V, respectivament. Representeu les línies equipotencials corresponents als potencials de $3,00$ V, $6,00$ V, $9,00$ V i $12,0$ V. Digueu si la distància entre les línies equipotencials és constant i quant val o valen aquestes distàncies.**

El potencial eléctrico debido a una carga puntual se expresa como

$$V = k \cdot \frac{Q}{r},$$

donde:
- V es el potencial eléctrico en volts (V),
- $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$,
- $Q = +1,00 \text{ nC} = 1,00 \cdot 10^{-9}$ C,
- r es la distancia desde la carga en metros (m).

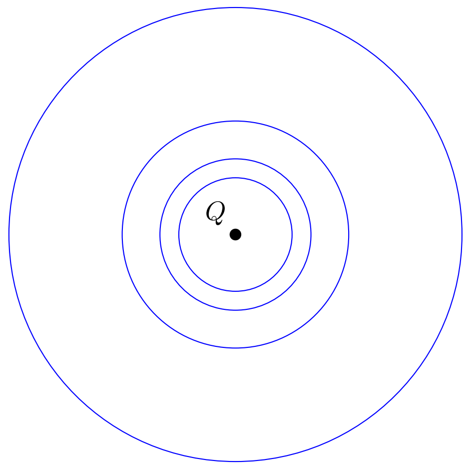
Despejamos r de la ecuación:

$$r = k \cdot \frac{Q}{V}.$$

Calculamos r para cada potencial:

1. Para $V = 3,00$ V:
$$r = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \cdot \frac{1,00 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{3,00 \text{ V}} = 3,00 \text{ m}.$$
2. Para $V = 6,00$ V:
$$r = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \cdot \frac{1,00 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{6,00 \text{ V}} = 1,50 \text{ m}.$$
3. Para $V = 9,00$ V:
$$r = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \cdot \frac{1,00 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{9,00 \text{ V}} = 1,00 \text{ m}.$$
4. Para $V = 12,0$ V:
$$r = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \cdot \frac{1,00 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{12,0 \text{ V}} = 0,75 \text{ m}.$$

Las líneas equipotenciales son circunferencias concéntricas alrededor de la carga puntual situada en el origen. A continuación, se muestra un esquema de las líneas equipotenciales para los potenciales dados:



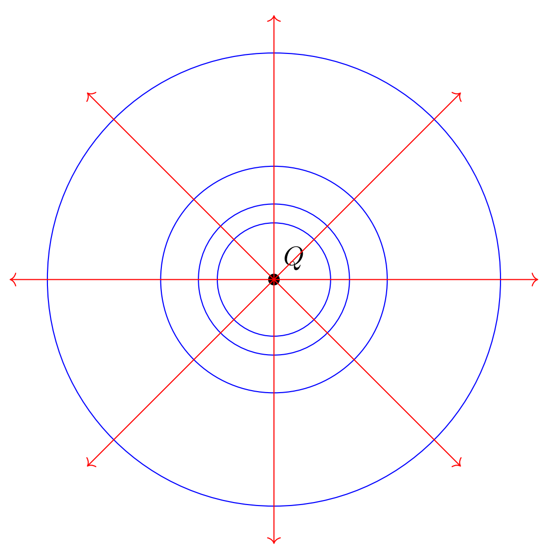
Observamos que las distancias entre las equipotenciales no son constantes:

- Entre $V = 3,00$ V y $V = 6,00$ V: $3,00 \text{ m} - 1,50 \text{ m} = 1,50$ m.
- Entre $V = 6,00$ V y $V = 9,00$ V: $1,50 \text{ m} - 1,00 \text{ m} = 0,50$ m.
- Entre $V = 9,00$ V y $V = 12,0$ V: $1,00 \text{ m} - 0,75 \text{ m} = 0,25$ m.

Por lo tanto, la distancia entre las líneas equipotenciales disminuye a medida que nos acercamos a la carga y no es constante.

b) En la mateixa figura, representeu 8 línies de camp elèctric. Quin angle formen les línies de camp amb les línies equipotencials en el punt on es creuen?

Las líneas de campo eléctrico para una carga puntual positiva salen radialmente desde la carga. Las líneas equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo en cada punto de intersección. Gráficamente:



Las líneas de campo eléctrico y las líneas equipotenciales se cruzan siempre en ángulo recto, es decir, forman un ángulo de 90° en cada punto de intersección.

Por lo tanto, el ángulo que forman es de 90°.

Problema 3. Ondas

El volcà Cumbre Vieja va entrar en erupció el 19 de setembre de 2021 a l'illa de La Palma. El so de l'erupció volcànica va ser mesurat per un equip de vulcanòlegs, que van detectar que estava format per diferents freqüències i que tenia un nivell d'intensitat sonora variant. Pel que fa al so que produeix en alguns moments de l'erupció, un volcà es pot modelitzar com si fos un instrument musical de vent gegant. D'una manera simplificada, podem considerar un volcà com un tub d'aire amb un extrem tancat i l'altre obert, on es produeixen ones estacionàries d'una manera semblant a una trompeta.

a) **En un moment determinat de l'erupció del Cumbre Vieja, es va detectar que la freqüència fonamental del so que emetia era de $5,40$ Hz. Calculeu la longitud d'ona d'aquest so. Dibuixeu el perfil de l'ona estacionària corresponent i calculeu la longitud del tub, que correspon a la longitud del tram de la xemeneia ple d'aire.**

b) **En un moment de l'erupció, es va detectar un nivell d'intensitat sonora de $72,0$ dB a la localitat de Todoque, que és a $5,22$ km del con del volcà. Calculeu el nivell d'intensitat sonora que se sentirà des de la costa de l'illa d'El Hierro, que és a $92,3$ km del volcà Cumbre Vieja. (Suposeu que no hi ha obstacles en la propagació del so entre el volcà Cumbre Vieja i l'illa d'El Hierro.)**

Dades:
$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.
La velocitat del so en l'aire és de 340 m/s.

Solución:

a) **En un moment determinat de l'erupció del Cumbre Vieja, es va detectar que la freqüència fonamental del so que emetia era de $5,40$ Hz. Calculeu la longitud d'ona d'aquest so. Dibuixeu el perfil de l'ona estacionària corresponent i calculeu la longitud del tub, que correspon a la longitud del tram de la xemeneia ple d'aire.**

La relación entre la velocidad del sonido, la frecuencia y la longitud de onda es:

$$v = \lambda \cdot f.$$

Despejando λ:

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

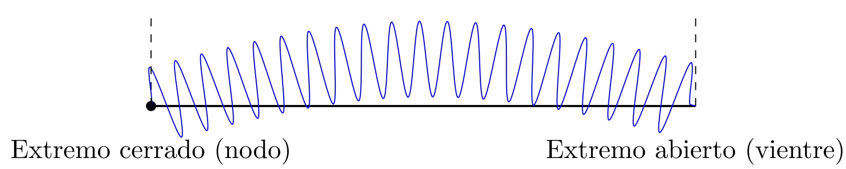
Sustituyendo los valores dados:

$$\lambda = \frac{340\ \mathrm{m/s}}{5,40\ \mathrm{Hz}} = 62,96\ \mathrm{m}.$$

Como el volcán se modela como un tubo con un extremo cerrado y otro abierto, las ondas estacionarias forman un nodo en el extremo cerrado y un vientre (antinodo) en el extremo abierto. En el modo fundamental, la longitud del tubo L está relacionada con la longitud de onda por:

$$L = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{62,96\ \mathrm{m}}{4} = 15,74\ \mathrm{m}.$$

$$L = \frac{\lambda}{4}$$



Por lo tanto, la longitud de onda es $\lambda = 62,96$ m y la longitud del tubo es $L = 15,74$ m.

b) **En un moment de l'erupció, es va detectar un nivell d'intensitat sonora de 72,0 dB a la localitat de Todoque, que és a 5,22 km del con del volcà. Calculeu el nivell d'intensitat sonora que se sentirà des de la costa de l'illa d'El Hierro, que és a 92,3 km del volcà Cumbre Vieja. (Suposeu que no hi ha obstacles en la propagació del so entre el volcà Cumbre Vieja i l'illa d'El Hierro.)**

El nivel de intensidad sonora se relaciona con la intensidad por:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Despejando I:

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}.$$

Sustituyendo los valores para Todoque:

$$I_1 = (1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}) \cdot 10^{72{,}0/10} = 1{,}58 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Asumiendo que el sonido se propaga esféricamente y sin pérdidas, la intensidad sonora es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

Entonces,

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 5{,}05 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Usando la fórmula del nivel de intensidad sonora:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_0}\right).$$

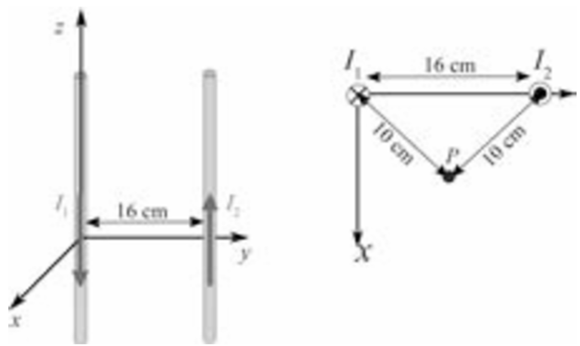
Sustituyendo los valores:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{5{,}05 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}}\right) = 47{,}0\ \mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora en la costa de El Hierro es de 47,0 dB

Problema 4. Campo Electromagnético

Dos fils conductors rectilinis molt llargs es troben situats paral·lels a l'eix z (perpendiculars al pla xy) i separats una distància de 16,0 cm. Pel fil 1 circula un corrent $I_1 = 1,50$ A dirigit cap avall i pel fil 2 circula un corrent $I_2 = 1,50$ A dirigit cap amunt.



a) **Donat un punt P situat al pla xy i equidistant als dos fils (la distància a cada fil és de 10,0 cm), feu un esquema sobre el pla xy del camp magnètic creat per cada fil al punt P i justifiqueu la direcció i el sentit del camp. Quin és el sentit i la direcció del camp magnètic total al punt P? Justifiqueu la resposta.**

b) **Calculeu la força per unitat de longitud que fa el fil 1 sobre el fil 2, és a dir, la força que fa el fil 1 sobre un tram d'1,00 m de longitud del fil 2. Indiqueu tant el mòdul com la direcció i el sentit de la força.**

Dades:
El mòdul de camp magnètic creat per un fil infinit per on circula un corrent I a una distància r del fil és $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m A^{-1}.

Solución:

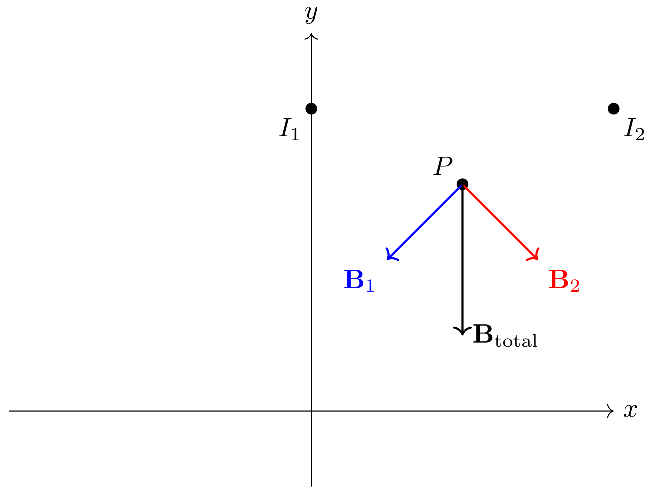
a) **Donat un punt P situat al pla xy i equidistant als dos fils (la distància a cada fil és de 10,0 cm), feu un esquema sobre el pla xy del camp magnètic creat per cada fil al punt P i justifiqueu la direcció i el sentit del camp. Quin és el sentit i la direcció del camp magnètic total al punt P? Justifiqueu la resposta.**

Primero determinaremos la dirección y el sentido del campo magnético creado por el hilo (1). Sabemos que las líneas de campo son circunferencias en el plano xy centradas en el hilo, y el sentido se determina con la regla de la mano derecha colocando el pulgar en la misma dirección que la corriente. Dado que el campo magnético es tangente a las líneas y tiene el mismo sentido, el campo magnético creado por el hilo (1) tiene la dirección y el sentido indicados en la gráfica. Observamos que, al ser tangente a la circunferencia, es perpendicular al radio. Este campo magnético tiene dos componentes según los ejes x e y, o lo que es equivalente, forma un cierto ángulo α con el eje y.

Siguiendo el mismo razonamiento anterior y aplicando nuevamente la regla de la mano derecha, se ve inmediatamente que la dirección y el sentido del campo magnético creado por el hilo (2) en el punto P son los indicados en la gráfica adjunta.

Los módulos de los campos B_1 y B_2 son iguales, dado que la corriente que circula por los dos hilos es la misma y el punto es equidistante a los dos hilos.

Además, dado que el punto P es equidistante a los dos cables, por simetría los vectores $\vec{B_1}$ y $\vec{B_2}$ forman el mismo ángulo α respecto al eje y, y como $|B_y| = B\cos(\alpha)$, entonces $|B_{y,1}| = |B_{y,2}|$. Además, del análisis anterior de la dirección y sentido de los campos $\vec{B_1}$ y $\vec{B_2}$, tenemos que $B_{y,2} = -B_{y,1}$. Sin embargo, las dos componentes en el eje x son positivas. Por tanto, cuando realizamos la suma vectorial, las componentes en la dirección y se cancelan mutuamente, de modo que solo queda la suma de las componentes en la dirección x.



Por lo tanto, el campo magnético total en el punto P está dirigido hacia abajo en el eje y.

b) Calculeu la força per unitat de longitud que fa el fil 1 sobre el fil 2, és a dir, la força que fa el fil 1 sobre un tram d'$1,00$ m de longitud del fil 2. Indiqueu tant el mòdul com la direcció i el sentit de la força.

La fuerza por unidad de longitud entre dos conductores paralelos es:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

donde:
- $I_1 = 1{,}50$ A (hilo 1),
- $I_2 = 1{,}50$ A (hilo 2),
- $d = 16{,}0$ cm $= 0{,}160$ m (distancia entre los hilos),
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\,m\,A^{-1}}$.

Sustituyendo:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T\,m\,A^{-1}} \cdot 1{,}50\ \mathrm{A} \cdot 1{,}50\ \mathrm{A}}{2\pi \cdot 0{,}160\ \mathrm{m}} = 2{,}81 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m}.$$

El módulo de la fuerza en un tramo de 1,00 m es:

$$F = \frac{F}{l} \cdot l = 2{,}81 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N/m} \cdot 1{,}00\ \mathrm{m} = 2{,}81 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$

- La fuerza entre dos corrientes paralelas es atractiva si las corrientes tienen el mismo sentido y repulsiva si tienen sentidos opuestos.
- En este caso, las corrientes I_1 y I_2 tienen sentidos opuestos (una hacia abajo y otra hacia arriba), por lo que la fuerza es repulsiva.
- El hilo 1 ejerce sobre el hilo 2 una fuerza dirigida alejándose del hilo 1, es decir, el hilo 2 es empujado en dirección positiva del eje x.

Por lo tanto, el módulo de la fuerza que ejerce el hilo 1 sobre un tramo de 1,00 m del hilo 2 es $2{,}81 \cdot 10^{-6}$ N, dirigida en la dirección positiva del eje x, alejándose del hilo 1.

Problema 5. Física Moderna

Per a mesurar la concentració de radó d'una estança, s'agafa una mostra de 180 cm^3 d'aire. Es col·loca la mostra dins d'un detector que compta el nombre total de desintegracions α. Considerem que totes les desintegracions provenen del radó 222, $^{222}_{86}$Rn. S'efectua un mesurament de les desintegracions durant 10 minuts cada dia, 10 dies seguits, i sempre a la mateixa hora. Les dades obtingudes són les següents:

t (dies)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N (nuclis desintegrats)	130	108	91	77	65	55	45	38	33	30

a) **Representeu, dins la quadrícula adjunta, els nuclis desintegrats en funció del temps. A partir de la gràfica determineu el període de semidesintegració. Tenint en compte que l'evolució temporal del nombre de nuclis desintegrats és la mateixa que la del nombre total de nuclis de radó a l'estança, calculeu la constant de desintegració.**

b) **Tenint en compte que un mesurament dura 10 minuts, quina activitat té la mostra de 180 cm^3 d'aire de l'estança el dia $t = 0$? L'Agència de Protecció Ambiental dels Estats Units (EPA) recomana no sobrepassar l'activitat de 4 pCi per litre d'aire. Segons aquest límit, és perillosa la concentració a $t = 0$ a l'estança d'on s'ha extret la mostra?**

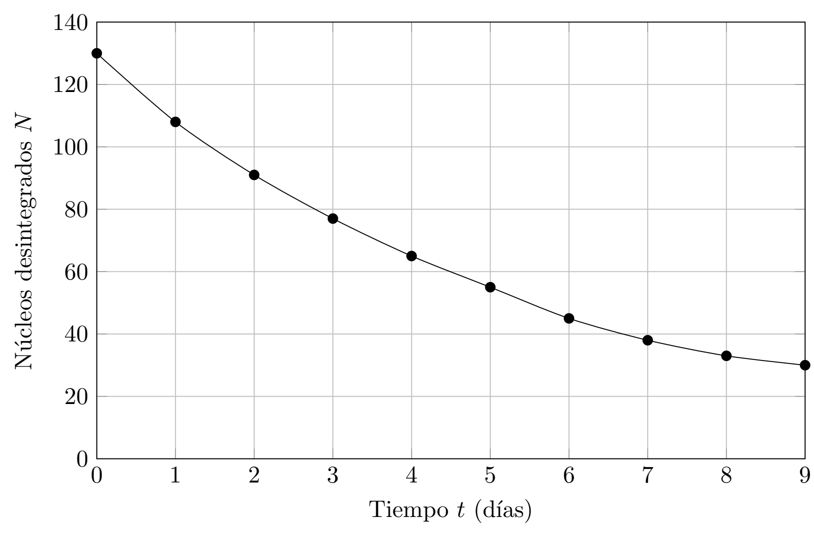
Dada:
1 Ci = $3,70 \times 10^{10}$ Bq.

Solución:

a) **Representeu, dins la quadrícula adjunta, els nuclis desintegrats en funció del temps. A partir de la gràfica determineu el període de semidesintegració. Tenint en compte que l'evolució temporal del nombre de nuclis desintegrats és la mateixa que la del nombre total de nuclis de radó a l'estança, calculeu la constant de desintegració.**

Primero, representamos los datos del número de núcleos desintegrados N en función del tiempo t en días:

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
N (núcleos desintegrados)	130	108	91	77	65	55	45	38	33	30



Al observar la gráfica, vemos que cuando el número de núcleos desintegrados se reduce a la mitad del valor inicial ($N = 65$), han transcurrido aproximadamente 4 días. Por lo tanto, el período de semidesintegración es:

$$T_{1/2} = 4 \text{ días.}$$

La constante de desintegración λ se calcula mediante la relación:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{4 \text{ días}} = \frac{0{,}6931}{4 \text{ días}} = 0{,}1733 \text{ días}^{-1}.$$

Para expresar λ en segundos inversos (s^{-1}), convertimos días a segundos:

$$1 \text{ día} = 24 \text{ h} \cdot 3600 \ \frac{\text{s}}{\text{h}} = 86\,400 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}1733 \ \frac{1}{\text{día}} \cdot \frac{1 \text{ día}}{86\,400 \text{ s}} = 2{,}005 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la constante de desintegración es $\boldsymbol{\lambda = 2{,}005 \cdot 10^{-6}}$ $\mathbf{s^{-1}}$.

b) **Tenint en compte que un mesurament dura 10 minuts, quina activitat té la mostra de 180 $\mathbf{cm^3}$ d'aire de l'estança el dia $\boldsymbol{t = 0}$? L'Agència de Protecció Ambiental dels Estats Units (EPA) recomana no sobrepassar l'activitat de 4 pCi per litre d'aire. Segons aquest límit, és perillosa la concentració a $\boldsymbol{t = 0}$ a l'estança d'on s'ha extret la mostra?**

Durante el tiempo de medición $\Delta t = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$, se registran $N_0 = 130$ desintegraciones en $t = 0$. La actividad inicial A_0 de la muestra es:

$$A_0 = \frac{N_0}{\Delta t} = \frac{130}{600 \text{ s}} = 0{,}2167 \text{ Bq}.$$

El volumen de la muestra es $V = 180 \text{ cm}^3 = 180 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. La concentración de actividad es:

$$C = \frac{A_0}{V} = \frac{0{,}2167 \text{ Bq}}{180 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = 1\,203{,}7 \ \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}.$$

La EPA establece un límite de 4 pCi por litro de aire. Convertimos este valor a Bq/m^3:

$$1 \text{ Ci} = 3{,}70 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ pCi} = 10^{-12} \text{ Ci} = 3{,}70 \cdot 10^{-2} \text{ Bq} \quad \Rightarrow \quad 4 \text{ pCi} = 4 \cdot 3{,}70 \cdot 10^{-2} \text{ Bq} = 0{,}148 \text{ Bq}.$$

Dado que $1 \text{ L} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, la concentración límite es:

$$C_{\text{lim}} = \frac{0{,}148 \text{ Bq}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 148 \ \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}.$$

Comparando con la concentración de nuestra muestra:

$$\frac{C}{C_{\text{lim}}} = \frac{1\,203{,}7 \ \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}}{148 \ \frac{\text{Bq}}{\text{m}^3}} = 8{,}13.$$

Por lo tanto, la concentración de radón en la muestra es aproximadamente 8 veces superior al límite recomendado por la EPA. Por lo tanto, la concentración en la estancia es peligrosa y excede los niveles seguros establecidos.

Problema 6. Física Moderna

S'observa que els fotons d'una determinada freqüència que incideixen sobre una superfície metàl·lica provoquen l'emissió d'electrons d'aquesta superfície.

a) **Si mantenim la intensitat de la llum constant i augmentem la freqüència dels fotons, com varia el nombre d'electrons emesos i l'energia d'aquests? Encercleu la resposta correcta dins del requadre següent i, a continuació, justifiqueu les dues respostes.**

- **Nombre d'electrons emesos: Disminueix / Es manté constant / Augmenta**
- **Energia dels electrons emesos: Disminueix / Es manté constant / Augmenta**

b) **Determineu la funció de treball dels electrons emesos sabent que el potencial de frenada és de 0, 29 V, quan la longitud d'ona incident és de 550 nm. Expresseu el resultat en eV.**

Dades:
$\mathbf{1\ eV = 1,602 \times 10^{-19}\ J}$.
$\boldsymbol{c = 3,00 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$.
$\boldsymbol{h = 6,63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}$.

Solución:

a) **Si mantenim la intensitat de la llum constant i augmentem la freqüència dels fotons, com varia el nombre d'electrons emesos i l'energia d'aquests? Encercleu la resposta correcta dins del requadre següent i, a continuació, justifiqueu les dues respostes.**

El efecto fotoeléctrico se produce por la transferencia de energía de los fotones a los electrones. Si la intensidad de la luz se mantiene constante, significa que la cantidad de energía total entregada a los electrones permanece igual. Dado que la energía de cada fotón está dada por $E = h\nu$, al aumentar la frecuencia ν de los fotones, la energía de cada fotón aumenta.

- *Número de electrones emitidos:* se mantiene constante

  Como la intensidad de la luz es constante, el número de fotones incidentes por unidad de tiempo permanece igual. Por lo tanto, el número de electrones emitidos también se mantiene constante.

- *Energía de los electrones emitidos:* aumenta

  Al aumentar la frecuencia de los fotones, cada fotón aporta más energía a los electrones. Esto se traduce en que los electrones emitidos tendrán una mayor energía cinética.

Por lo tanto, el número de electrones emitidos se mantiene constante y la nergía de los electrones emitidos aumenta.

b) **Determineu la funció de treball dels electrons emesos sabent que el potencial de frenada és de 0, 29 V, quan la longitud d'ona incident és de 550 nm. Expresseu el resultat en eV.**

Utilizamos el balance de energía en el efecto fotoeléctrico:

$$E_{\mathrm{C}} = h\nu - W_0 \quad \Rightarrow \quad W_0 = h\nu - E_{\mathrm{C}},$$

donde E_{C} es la energía cinética de los electrones emitidos y W_0 es la función de trabajo del material. El potencial de frenado V_{frenada} está relacionado con la energía cinética de los electrones mediante:

$$E_{\mathrm{C}} = e \cdot V_{\mathrm{frenada}} = 0{,}29\ \mathrm{eV}.$$

La frecuencia de los fotones ν se calcula a partir de la longitud de onda λ:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{550 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 5{,}45 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}.$$

La energía de los fotones $h\nu$ es:

$$h\nu = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J·s} \cdot 5{,}45 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Convertimos E_C a julios:

$$E_\text{C} = 0{,}29\ \text{eV} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 4{,}64 \cdot 10^{-20}\ \text{J}.$$

Ahora, calculamos la función de trabajo W_0:

$$W_0 = h\nu - E_\text{C} = 3{,}62 \cdot 10^{-19}\ \text{J} - 4{,}64 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

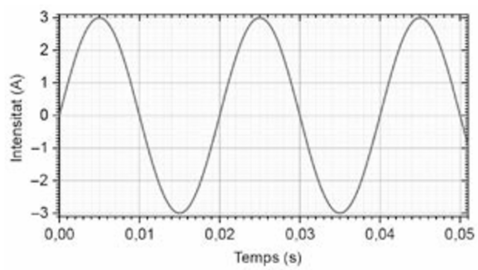
Convertimos W_0 a electronvoltios (eV):

$$W_0 = \frac{3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 1{,}97\ \text{eV}.$$

Por lo tanto, la función de trabajo es $\boldsymbol{W_0 = 1{,}97}$ eV.

Problema 7. Campo Electromagnético

Considereu un petit generador elèctric domèstic que està format per una bobina que pot girar tallant les línies de camp magnètic d'un imant fix. Aquest generador produeix el corrent altern representat en el gràfic següent:



a) **A partir del gràfic, deduïu la freqüència de gir de la bobina (en Hz) i el valor de la intensitat màxima $I_{\text{màx}}$. Escriviu la funció $I(t)$ que descriu la relació entre la intensitat i el temps que mostra el gràfic.**

b) **Per a poder connectar electrodomèstics a aquest generador elèctric, disposem d'un transformador. Connectem aquest corrent altern al primari d'un transformador. La bobina del primari del transformador té 124 voltes. Calculeu el nombre de voltes que són necessàries a la bobina del secundari per a obtenir una FEM eficaç (ε_{ef}) de 220 V. Suposeu que es tracta d'un transformador ideal. Es tracta d'un transformador elevador o reductor?**

Solución:

a) **A partir del gràfic, deduïu la freqüència de gir de la bobina (en Hz) i el valor de la intensitat màxima $I_{\text{màx}}$. Escriviu la funció $I(t)$ que descriu la relació entre la intensitat i el temps que mostra el gràfic.**

A partir del gráfico proporcionado, observamos que el período de la señal de corriente alterna es:

$$T = 0{,}02 \text{ s}.$$

– Frecuencia de giro de la bobina:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02 \text{ s}} = 50{,}0 \text{ Hz}$$

– Intensidad máxima: A partir del gráfico, se observa que la intensidad máxima es

$$I_{\text{máx}} = 3{,}0 \text{ A}.$$

– Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50{,}0 \text{ Hz} = 100\pi \text{ rad/s}.$$

– Función $I(t)$: La relación entre la intensidad y el tiempo está descrita por una función sinusoidal de la forma

$$I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi_0).$$

Dado que inicialmente, $I(t = 0) = 0$, sustituimos:

$$0 = 3{,}0 \text{ A} \cdot \cos(\phi_0) \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Por lo tanto, la función queda:

$$I(t) = 3{,}0 \text{ A} \cdot \cos\left(100\pi\, t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Por lo tanto, la solución es:
- **Frecuencia de giro de la bobina: $f = 50{,}0$ Hz.**
- **Intensidad máxima: $I_{\text{máx}} = 3{,}0$ A.**
- **Función de la intensidad:**

$$\boldsymbol{I(t) = 3{,}0\ \text{A} \cdot \cos\left(100\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{donde } t \text{ en s.}}$$

b) **Per a poder connectar electrodomèstics a aquest generador elèctric, disposem d'un transformador. Connectem aquest corrent altern al primari d'un transformador. La bobina del primari del transformador té 124 voltes. Calculeu el nombre de voltes que són necessàries a la bobina del secundari per a obtenir una FEM eficaç (ε_{ef}) de 220 V. Suposeu que es tracta d'un transformador ideal. Es tracta d'un transformador elevador o reductor?**

Dado que conectamos el corriente alterna al primario de un transformador ideal, utilizamos la relación de transformación de voltaje y número de vueltas:

$$\frac{\varepsilon_{\text{sec}}}{\varepsilon_{\text{prim}}} = \frac{N_{\text{sec}}}{N_{\text{prim}}},$$

donde:
- $\varepsilon_{\text{sec}} = 220$ V (FEM eficaz en el secundario),
- $N_{\text{prim}} = 124$ vueltas (primario),
- N_{sec} = número de vueltas en el secundario (a calcular),
- $\varepsilon_{\text{prim}}$ = FEM eficaz en el primario.

Asumiendo que la FEM eficaz en el primario es la misma que la del secundario, es decir, $\varepsilon_{\text{prim}} = 220$ V, la relación de vueltas sería:

$$N_{\text{sec}} = N_{\text{prim}} \cdot \frac{\varepsilon_{\text{sec}}}{\varepsilon_{\text{prim}}} = 124 \cdot \frac{220\ \text{V}}{220\ \text{V}} = 124 \cdot 1 = 124 \text{ vueltas.}$$

Sin embargo, para obtener una FEM secundaria de 220 V partiendo de una FEM primaria diferente, por ejemplo, $\varepsilon_{\text{prim}} = 110$ V, la cantidad de vueltas en el secundario sería:

$$N_{\text{sec}} = N_{\text{prim}} \cdot \frac{\varepsilon_{\text{sec}}}{\varepsilon_{\text{prim}}} = 124 \cdot \frac{220\ \text{V}}{110\ \text{V}} = 124 \cdot 2 = 248 \text{ vueltas.}$$

Determinamos el tipo de transformador:
- *Transformador elevador:* Si $\varepsilon_{\text{sec}} > \varepsilon_{\text{prim}}$, es decir, si el secundario tiene más vueltas que el primario.
- *Transformador reductor:* Si $\varepsilon_{\text{sec}} < \varepsilon_{\text{prim}}$, es decir, si el secundario tiene menos vueltas que el primario.

En nuestro caso, si asumimos que $\varepsilon_{\text{prim}} = 110$ V y $\varepsilon_{\text{sec}} = 220$ V, entonces:

$$N_{\text{sec}} = 248 \text{ vueltas} > N_{\text{prim}} = 124 \text{ vueltas.}$$

Por lo tanto, se trata de un transformador elevador.

Problema 8. Física Moderna

A principis dels anys seixanta del segle XX, els físics Robert Pound, Glen Anderson Rebka i Joseph Snider van verificar al Jefferson Physical Laboratory de Harvard la predicció d'Einstein que la gravetat canvia la freqüència de la llum. Entendre aquest efecte és essencial per a la navegació moderna, com per exemple per al funcionament del GPS. L'experiment consistia a mesurar la variació de freqüència d'uns fotons entre dos punts a diferent altura.

a) **Calculeu la freqüència, la massa (vegeu la nota) i la quantitat de moviment dels fotons al terra del laboratori de l'experiment si tenen una energia de $14,4$ keV.**

b) **L'energia mecànica dels fotons és la suma de l'energia dels fotons i de l'energia potencial gravitatòria. A partir del principi de conservació de l'energia mecànica, calculeu la variació (en valor absolut) de l'energia i de la freqüència dels fotons entre dos punts separats verticalment $22,6$ m. És a dir, entre el terra del laboratori i un altre punt a la mateixa vertical, $22,6$ m més amunt. En quin punt el fotó té una freqüència més gran, quan es troba al terra o quan està $22,6$ m per sobre del terra?**

Nota: Tot i que la massa en repòs d'un fotó és zero, la seva massa efectiva quan és atret per les altres masses és: $m = \frac{E_{\text{fotó}}}{c^2}$.

Dades:
1 eV $= 1,602 \times 10^{-19}$ J.
$c = 3,00 \times 10^8$ m s^{-1}.
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ J s.
$g = 9,81$ m s^{-2}.

Solución:

a) **Calculeu la freqüència, la massa (vegeu la nota) i la quantitat de moviment dels fotons al terra del laboratori de l'experiment si tenen una energia de $14,4$ keV.**

Conversión de la energía del fotón a julios:

$$E_{\text{fotón}} = 14{,}4 \text{ keV} = 14{,}4 \cdot 10^3 \text{ eV} \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 2{,}31 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

Cálculo de la frecuencia del fotón:

$$\nu = \frac{E_{\text{fotón}}}{h} = \frac{2{,}31 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}} = 3{,}48 \cdot 10^{18} \text{ Hz}.$$

Cálculo de la masa efectiva del fotón:

$$m = \frac{E_{\text{fotón}}}{c^2} = \frac{2{,}31 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{(3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2} = 2{,}56 \cdot 10^{-32} \text{ kg}.$$

Cálculo de la cantidad de movimiento del fotón:

$$p = m \cdot c = 2{,}56 \cdot 10^{-32} \text{ kg} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} = 7{,}69 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Por lo tanto, la solución es:
- **Frecuencia del fotón: $\nu = 3{,}48 \cdot 10^{18}$ Hz.**
- **Masa efectiva del fotón: $m = 2{,}56 \cdot 10^{-32}$ kg.**
- **Cantidad de movimiento del fotón: $p = 7{,}69 \cdot 10^{-24}$ kg m s^{-1}.**

b) L'energia mecànica dels fotons és la suma de l'energia dels fotons i de l'energia potencial gravitatòria. A partir del principi de conservació de l'energia mecànica, calculeu la variació (en valor absolut) de l'energia i de la freqüència dels fotons entre dos punts separats verticalment 22,6 m. És a dir, entre el terra del laboratori i un altre punt a la mateixa vertical, 22,6 m més amunt. En quin punt el fotó té una freqüència més gran, quan es troba al terra o quan està 22,6 m per sobre del terra?

La energía mecánica de un fotón es:

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{fotón}} + E_{\mathrm{potencial}} = h\nu + m \cdot g \cdot h.$$

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_{\mathrm{m},0} = E_{\mathrm{m},f} \quad \Rightarrow \quad h\nu_0 + m \cdot g \cdot h_0 = h\nu_f + m \cdot g \cdot h_f,$$

donde:

- $h_0 = 0$ m (suelo del laboratorio),
- $h_f = 22{,}6$ m (punto elevado).

Reorganizando la ecuación:

$$h\nu_f - h\nu_0 = m \cdot g \cdot h_0 - m \cdot g \cdot h_f \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{\mathrm{fotón}} = h(\nu_f - \nu_0) = m \cdot g \cdot (h_0 - h_f) = m \cdot g \cdot (-h_f).$$

Entonces,

$$|\Delta E_{\mathrm{fotón}}| = m \cdot g \cdot h_f.$$

Sustituyendo los valores:

$$|\Delta E_{\mathrm{fotón}}| = 2{,}56 \cdot 10^{-32}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 22{,}6\ \mathrm{m} = 5{,}68 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{J}.$$

Cálculo de la variación de la frecuencia:

$$\Delta\nu = \nu_f - \nu_0 = \frac{\Delta E_{\mathrm{fotón}}}{h} = \frac{5{,}68 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}} = 8{,}57 \cdot 10^{3}\ \mathrm{Hz}.$$

Dado que la energía del fotón disminuye al ascender en el campo gravitatorio, su frecuencia también disminuye. Entonces, el fotón tiene una frecuencia mayor cuando se encuentra en el suelo del laboratorio y una frecuencia menor a 22,6 m sobre el suelo.

Por lo tanto, la solución es:

- **Variación absoluta de la energía del fotón: $|\Delta E_{\mathrm{fotón}}| = 5{,}68 \cdot 10^{-30}$ J.**
- **Variación de la frecuencia del fotón: $\Delta\nu = 8{,}570 \cdot 10^{3}$ Hz.**
- **Frecuencia mayor: La frecuencia es mayor en el suelo del laboratorio.**